



TITLE:

# Crystals and Vertex Models(Algebraic Analysis and Number Theory)

AUTHOR(S):

中屋敷, 厚

---

CITATION:

中屋敷, 厚. Crystals and Vertex Models(Algebraic Analysis and Number Theory). 数理解析  
研究所講究録 1992, 810: 16-21

ISSUE DATE:

1992-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83013>

RIGHT:

# Crystals and Vertex Models

神戸大・自然科学 中屋敷 厚  
(Nakayashiki Atsushi)

以下は、次の方々との共同研究[1,2]の解説です。

S-J Kang, 柏原正樹, K.C. Misra, 三輪哲二, 中島俊樹 各氏。

我々は、crystalの理論を使って、ある種類の2次元格子模型(vertex models)の1点関数が、アフィンリー環の指標を使って書き表せる、という結果を得たのであるが、証明のKeyポイントは、次の点である。

- (1).  $B(\lambda) \otimes B \cong B(\mu)$  の型の crystal の同型を通して、crystal with highest weight と "path" との全単射を作る。
- (2).  $R$ -matrix から  $q \rightarrow 0$  の極限をとって、 $H$ -関数を得るプロセスを crystal を使って厳密に意味づける。
- (3). (1)の同型を通して定義した path の weight を  $H$ -関数を使って表わす。

ただし、ここで1点関数と "paths" を結び付ける所で、Baxter による Corner transfer matrix method (CTMM) を使います。最近

6-vertex model ( $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ , level 1 に対応する) については, CTMM を經由せずに, 上の結果を証明することに成功しました。それについては, 神保氏の講演録および, その参考文献を参照して下さい。

以上の一般論については, 文献[1]を参照していただくこととして, ここでは, (1) の具体例を示すにとどめることにします。

## §0 Basic definitions

$\mathfrak{g}$  を affine Lie algebra,  $P$  を  $\mathfrak{g}$  の weight lattice,  $\delta$  を null root  $P_\delta = P/\mathbb{Z}\delta$  とおく。又,  $I$  を  $\mathfrak{g}$  の simple roots の index set とする。

Definition.  $B$  が crystal とは

- (a)  $B$  は集合であり,  $B = \bigsqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$  なる分解を持つ。  
 (b) 写像  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \setminus \{0\} \rightarrow B \setminus \{0\}$  ( $i \in I$ ) で, 以下の性質を満たすものが存在する。

$$(1) \tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0 \quad (i \in I)$$

$$(2) \tilde{e}_i B_\lambda \subset B_{\lambda + \alpha_i} \setminus \{0\}, \quad \tilde{f}_i B_\lambda \subset B_{\lambda - \alpha_i} \setminus \{0\} \quad (\{\alpha_i\} \text{ は simple roots})$$

$$(3) \forall i \in I, \forall b \in B \quad \exists m \quad \text{s.t.} \quad \tilde{e}_i^m b = \tilde{f}_i^m b = 0$$

$$(4) \varphi_i(b) := \max\{m \mid \tilde{f}_i^m b \neq 0\} \quad \varepsilon_i(b) := \max\{m \mid \tilde{e}_i^m b \neq 0\} \quad \text{とおく。}$$

$$b \in B_\lambda \Rightarrow \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \langle R_i, \lambda \rangle \quad (\{R_i\} \text{ は simple coroots})$$

$$(5) b, b' \in B \quad i \in I \text{ に対し,} \quad b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow \tilde{e}_i b' = b$$

この定義で,  $P$  を  $P_\delta$  で置き換えたものを, classical crystal と呼ぶ。これに対し, 上で定義した crystal を affine crystal と呼ぶ。両方合わせて, 単に crystal と書くことにする。

Graph structure.

$$b \xrightarrow{i} b' \Leftrightarrow b' = \tilde{f}_i b \quad (i \in I)$$

により crystal  $B$  には, colored oriented graph の構造が"入る。

Tensor product

$B_1, B_2$  : crystals

$B_1 \otimes B_2$  は, 次により crystal とする

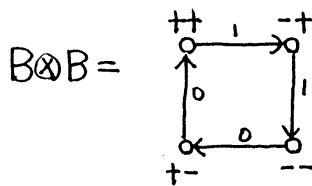
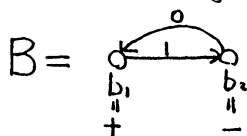
$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \end{cases}.$$

## §1 Examples

$\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{sl}}_2$ ,  $P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\delta$ ,  $P_0 \subseteq \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1$ ,  $\sqcup \sqcup \sqcup \Lambda_i (i=0,1)$  は

fundamental weights,



$++ = + \otimes +$  等。

paths  $P(\Lambda_i) (i=0,1)$  は, 次で定義される。

$$P(\Lambda_0) = \{ (P(i))_{i=1}^{\infty} \mid P(2i) = +, P(2i+1) = - \quad \forall i \gg 0, P(j) \in B \quad \forall j \}$$

$$P(\Lambda_1) = \{ (P(i))_{i=1}^{\infty} \mid P(2i) = -, P(2i+1) = + \quad \forall i \gg 0, P(j) \in B \quad \forall j \}$$

$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$  の  $P(\Lambda_j)$  への作用は次の規則で与えられる。

(a)  $\tilde{e}_0, \tilde{f}_0$  の作用

$P \in P(\Lambda_j)$  とする。以下  $P$  を表示するのに  $P = (P(i))_{i=1}^{\infty}$  を右から左へ

書いてゆくものとする。例えば  $P = (\cdots + - + - + -)$  は  $P(1) = -, P(2) = +$  ... など。さて  $P$  に対して、次の (i)-(iii) の処理を行なう。

(i) 隣り合う  $-+$  の組を消去する。 ex.  $P = \cdots + \overset{12}{-} \overset{11}{+} \overset{10}{-} \overset{9}{+} \overset{8}{-} \overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{-} \overset{1}{-}$

(ii) (i) で消去した番号はなりのものとして。 ex.  $\overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{-} \overset{1}{-}$

隣り合う  $-+$  の組を消去する。

(iii) (ii) を inductive にくり返す。最後に ex.  $\overset{7}{+} \cdots \overset{2}{-} \overset{1}{-}$

$+ \cdots + - \cdots -$  の形になる。

(iii) の状態で

$$\tilde{f}_0 + \cdots + \{ - \cdots - \} = + \cdots + \{ + \cdots - \} \quad \text{ex. } \tilde{f}_0 P = \cdots \overset{10}{+} \overset{9}{-} \overset{8}{+} \overset{7}{-} \overset{6}{+} \overset{5}{-} \overset{4}{+} \overset{3}{-} \overset{2}{+} \overset{1}{-}$$

$$\tilde{e}_0 + \cdots + \{ - \cdots - \} = + \cdots + \{ - \cdots - \} \quad \text{ex. } \tilde{e}_0 P = \cdots + - + - - - + + - -$$

ここで  $\{ \}$  は (iii) の状態で  $+$  と  $-$  の境を表している。

(b)  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$  の作用。

(a) で  $+$  と  $-$  とを入れ換えて全く同じ操作をする。

(iii) に対応する状態で

$$\tilde{f}_1 - \cdots - \{ + \cdots + \} = - \cdots - \{ - + \cdots + \}$$

$$\tilde{e}_1 - \cdots - \{ + \cdots + \} = - \cdots - + \{ + \cdots + \}$$

いくつか例を書いてみると

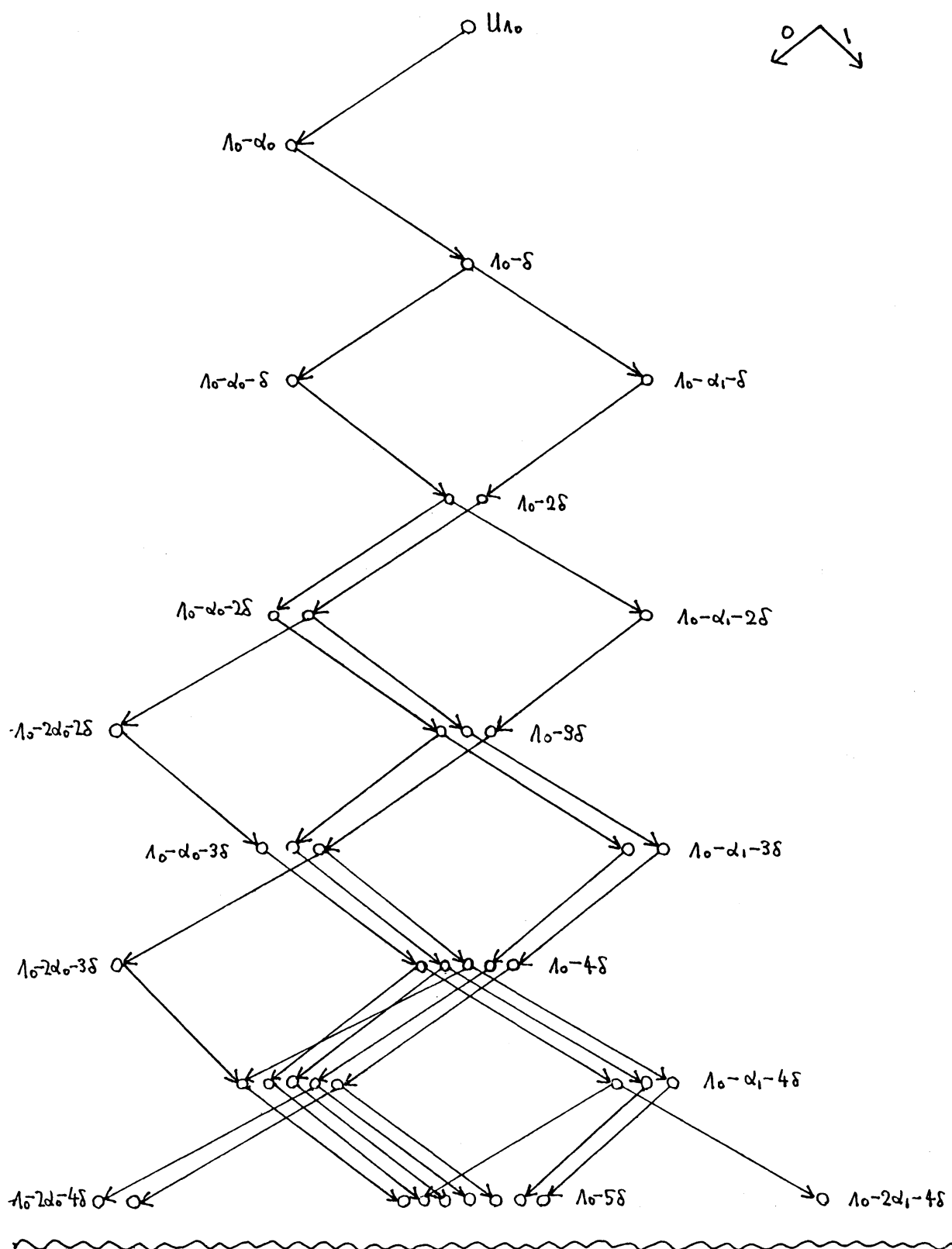
$$u_{10} = (\cdots + - + - + - + - + -) \in P(10)$$

$$\tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots + - + - + - + - + +) \quad \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + + - +)$$

$$\tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + - - +) \quad \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - - + - +)$$

$$\tilde{f}_1^2 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + - - -) \quad \tilde{f}_1^2 \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - - + - -)$$

$P(\lambda_0)$  の crystal graph を書くと、次のようになる。(height 10 の descendant まで)



さて,  $(L(\lambda_i), B(\lambda_i))$  を highest weight  $\lambda_i$  の既約 highest weight  $U_q(\hat{\mathfrak{g}}_2)$ -加群の crystal base とする. すると  $B(\lambda_i) \simeq P(\lambda_i)$  なる affine crystal としての同型が成り立つ. ここで, crystal の間の射は,  $\hat{e}_i, \hat{f}_i$  と可換な写像とし, 同型射とは, この写像が全単射である場合を言う.  $P(\lambda_i)$  については, 次の classical crystal としての同型が成り立つことは自明であろう.

$$\begin{array}{ccc} P(\lambda_i) \otimes B & \xrightarrow{\sim} & P(\lambda_{i-1}) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ (P(\lambda_i))_{\mathbb{Z}}^{\psi} \otimes \varepsilon & \longrightarrow & (\cdots P(\lambda) P(\lambda) \varepsilon) \end{array} \quad \varepsilon = \pm$$

paths は,  $\square$  の性質  $P(\lambda_i) \otimes B \simeq P(\lambda_{i-1})$  により特徴づけられ,

$B(\lambda_i)$  に対して, これを証明することにより,  $B(\lambda_i)$  と  $P(\lambda_i)$  との間  
の全単射が得られる.

### 参考文献

- [1] S-J Kang, M. Kashiwara, K.C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima  
and A. Nakayashiki, Affine Crystals and Vertex Models  
RIMS preprint 828
- [2] —, Perfect Crystals of Quantum Affine Lie Algebras,  
RIMS preprint 868
- [3] M. Jimbo, K.C. Misra, T. Miwa and M. Okado, Combinatorics  
of Representations of  $U_q(\hat{\mathfrak{g}}(n))$  at  $q=0$ , CMP 136 (1991) 543-566